

# Tema 3

## Los postulados de la Mecánica Cuántica

Alfonso V. Ramallo

### 1 Las reglas de la mecánica cuantica

La mecánica cuántica esta construida logicamente a partir de una serie de postulados, que pasamos a enunciar

#### Postulado 1

Las propiedades de un sistema están representadas por medio de un vector de estado  $|\psi\rangle$ , que es un elemento de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , llamado el espacio de estados. El vector  $|\psi\rangle$  contiene la mas completa información sobre el sistema y es una representación matemática del estado físico del sistema.

#### Postulado 2

Las propiedades físicas están representadas por operadores hermiticos que actúan sobre el espacio de estados  $\mathcal{H}$ .

#### Postulado 3

Cuando la propiedad representada por el operador  $A$  se mide en el sistema, el resultado es siempre uno de los autovalores de  $A$ . La probabilidad de que el resultado de la medida sea  $a$  es  $|\langle a|\psi\rangle|^2$ , siendo  $|\psi\rangle$  el vector de estado normalizado y  $|a\rangle$  el autovector normalizado de  $A$  correspondiente al autovalor  $a$ . Inmediatamente después de la medida el sistema esta en un estado descrito por el autovector correspondiente al autovalor obtenido en la medida.

#### Postulado 4

El vector de estado de un sistema evoluciona con el tiempo de acuerdo con la ecuación de Schrödinger:

$$\boxed{i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t) |\psi(t)\rangle} \quad (1.1)$$

El operador hermitico  $H(t)$  se llama operador Hamiltoniano y representa la energia total del sistema. Ademas  $\hbar$  es una constante universal.

## 2 Comentarios y observaciones al postulado 1

Una de las consecuencias del postulado 1 es el llamado **principio de superposicion**, que es un corolario del hecho de que los estados pertenecen a un espacio vectorial. Entonces, si  $|\psi\rangle$  y  $|\chi\rangle$  son dos estados fisicos ( $|\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ ), su combinacion lineal:

$$a|\psi\rangle + b|\chi\rangle, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

tambien es un estado fisico del sistema, es decir  $a|\psi\rangle + b|\chi\rangle \in \mathcal{H}$ . En particular, si  $a \in \mathbb{C}$ , el estado  $a|\psi\rangle$  representa un estado de  $\mathcal{H}$ . De hecho representa el mismo estado porque la constante  $a$  se puede fijar normalizando el vector (tal como pide el postulado 3). A partir de ahora supondremos que todo vector de estado esta normalizado, es decir que  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ . Observemos que todavia hay una ambigüedad porque si  $|\psi\rangle$  esta normalizado, tambien lo esta  $e^{i\alpha}|\psi\rangle$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Supondremos que  $|\psi\rangle$  y  $e^{i\alpha}|\psi\rangle$  son descripciones equivalentes del estado. Todos los vectores que se diferencian en una fase se dice que forman un **rayo**. Asi pues el estado de un sistema en mecanica cuantica esta descrito por un rayo en un espacio de Hilbert.

Observemos que la ambigüedad de fase se refiere a una fase global. Asi, si en el estado:

$$|\xi\rangle = a|\psi\rangle + b|\chi\rangle \quad (2.2)$$

cambiamos  $|\psi\rangle \rightarrow e^{i\alpha}|\psi\rangle$  y  $|\chi\rangle \rightarrow e^{i\beta}|\chi\rangle$  no obtenemos un estado equivalente porque  $|\xi\rangle$  no cambia por una fase.

Tambien es importante señalar que la descripcion de un estado por medio de un vector es aplicable cuando tenemos informacion completa sobre el sistema. Hay situaciones en las que esto no es posible y no podemos determinar completamente el estado. Esto sucede cuando hay fluctuaciones termicas, por ejemplo. En este caso el sistema debe describirse por medio de la **matriz densidad** (tambien llamada **operador densidad**).

## 3 Comentarios y observaciones al postulado 2

Este postulado establece que a cada propiedad fisica (llamada tambien **observable**) le corresponde un operador hermitico. El caracter hermitico del operador nos asegura que sus autovalores son reales y, segun el postulado 3, tambien lo seran los resultados de la medida del observable en cualquier estado  $|\psi\rangle$ . En el postulado no se especifica cual es el operador concreto para cada observable. En sistemas que tienen un analogo clasico basta establecer cual son los operadores correspondientes a coordenadas y momentos y luego sustituir en la expresion clasica hamiltoniana el momento y las coordenadas por sus correspondientes operadores. Esta prescripcion (que esta llena de ambigüedades en algunos casos) se denomina **cuantizacion canonica**.

En general, para identificar el operador correspondiente a una magnitud fisica utilizaremos los **principios de simetria**. Asi el hamiltoniano, u operador energia,

tiene que estar asociado a las traslaciones temporales, el momento lineal a las traslaciones espaciales y el momento angular a las rotaciones. Mas adelante precisaremos el sentido de esta asociacion: basicamente el operador generara la correspondiente simetria. Seguiremos de esta forma un principio basico en la fisica teoria actual que establece que las simetrias dictan la teoria, es decir que el principio basico que subyace a toda teoria fundamental debe de ser un principio de simetria.

## 4 Comentarios y observaciones al postulado 3

El hecho de que lo observables esten representados por operadores hermiticos, segun se dice en el postulado 2, nos asegura que sus autovalores sean numeros reales, y por lo tanto tambien lo sean los resultados obtenidos al efectuar una medida del observable. Este hecho es satisfactorio desde el punto de vista fisico porque no seria aceptable obtener un numero complejo al medir, por ejemplo, la energia o el momento de una particula.

Veamos como se aplica el postulado 3 en un caso concreto. Sea el estado  $|\psi\rangle$  en un espacio de Hilbert de dos dimensiones:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Supongamos que medimos el observable  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Sabemos que el resultado de la medida puede tomar dos valores  $s_z = \pm 1$ . La probabilidad de obtener estos dos valores en el estado escrito mas arriba es:

$$P(s_z = +1) = |\langle +z|\psi\rangle|^2, \quad P(s_z = -1) = |\langle -z|\psi\rangle|^2, \quad (4.2)$$

siendo  $|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $|-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  los autovectores de  $\sigma_z$  con autovalor  $\pm 1$  respectivamente. Calculemos estas probabilidades:

$$\begin{aligned} P(s_z = +1) &= \left| (1, 0) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}, \\ P(s_z = -1) &= \left| (0, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

es decir que tenemos la misma probabilidad (1/2) de obtener ambos autovalores como resultado de la medida.

Supongamos ahora que medimos  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  en  $|\psi\rangle$ . Los posibles autovalores son  $s_y = \pm 1$  y los autovectores son  $|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  y  $|-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ . Las

probabilidades son:

$$P(s_y = +1) = |\langle +y|\psi\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (1, -i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} (1+1) \right|^2 = 1, \\ P(s_y = -1) = |\langle -y|\psi\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (-i, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} (-i+i) \right|^2 = 0, \quad (4.4)$$

es decir que el 100 por cien de las veces que medimos  $\sigma_y$  en este estado obtenemos  $s_y = +1$ . Esto es debido al hecho que nuestro estado  $|\psi\rangle$  es igual al autoestado  $|+y\rangle$  de  $\sigma_y$ .

Por ultimo, midamos  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Los autovalores son tambien  $s_x = \pm 1$  y los autovectores son  $|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Las probabilidades en este caso son:

$$P(s_x = +1) = |\langle +x|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4} |1+i|^2 = \frac{1}{4} (1+1) = \frac{1}{2}, \\ P(s_x = -1) = |\langle -x|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4} |1-i|^2 = \frac{1}{4} (1+1) = \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

Veamos ahora algunas consecuencias del postulado 3, junto con los postulados 1 y 2. Consideremos el operador  $\mathcal{P}_\chi$ , definido para cada estado  $|\chi\rangle$  como:

$$\mathcal{P}_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|. \quad (4.6)$$

Sabemos que  $\mathcal{P}_\chi$  es hermitico y sus autovalores son 1 y 0 (puesto que  $\mathcal{P}_\chi^2 = \mathcal{P}_\chi$ ). De hecho el autovector correspondiente al autovalor +1 es precisamente  $|\chi\rangle$  y cualquier otro vector ortogonal a  $|\chi\rangle$  es autovector con autovalor 0. Entonces, segun el postulado 3, si hacemos una medida de  $\mathcal{P}_\chi$  y obtenemos +1 el sistema estara en el estado  $|\chi\rangle$  despues de la medida y esto sucedera con probabilidad  $|\langle\chi|\psi\rangle|^2$ , siendo  $|\psi\rangle$  el estado inicial. Asi pues la probabilidad de la transicion  $|\psi\rangle \rightarrow |\chi\rangle$  vendra dada por:

$$\boxed{P(\psi \rightarrow \chi) = |\langle\chi|\psi\rangle|^2} \quad (4.7)$$

Definamos la **amplitud de probabilidad** de la transicion  $|\psi\rangle \rightarrow |\chi\rangle$  como:

$$a(\psi \rightarrow \chi) = \langle\chi|\psi\rangle. \quad (4.8)$$

Observese que la probabilidad de transicion es igual al cuadrado del modulo de la amplitud:

$$\boxed{P(\psi \rightarrow \chi) = |a(\psi \rightarrow \chi)|^2} \quad (4.9)$$

Por otra parte, insertando la unidad como  $1 = \sum_i |i\rangle\langle i|$  en el producto interior  $\langle\chi|\psi\rangle$ , tenemos:

$$\langle\chi|\psi\rangle = \sum_i \langle\chi|i\rangle \langle i|\psi\rangle. \quad (4.10)$$

Los productos  $\langle i|\psi\rangle$  y  $\langle \chi|i\rangle$  del segundo miembro de esta ultima ecuacion pueden interpretarse como las amplitudes de las transiciones  $|\psi\rangle \rightarrow |i\rangle$  y  $|i\rangle \rightarrow |\chi\rangle$  respectivamente. Por lo tanto podemos interpretar los estados  $|i\rangle$  en esta esta ecuacion como estados intermedios por los que pasa el sistema en su transicion  $|\psi\rangle \rightarrow |\chi\rangle$ . En terminos de amplitudes, la igualdad anterior se escribe como:

$$a(\psi \rightarrow \chi) = \sum_i a(\psi \rightarrow i) a(i \rightarrow \chi) . \quad (4.11)$$

Es decir, la amplitud total de la transicion  $|\psi\rangle \rightarrow |\chi\rangle$  es igual a la **suma de amplitudes** correspondientes a todas las formas posibles en las cuales la transicion puede suceder.

Evidentemente, insertando varias veces la unidad podemos generalizar la relacion anterior al caso en el cual la transicion puede ocurrir a traves de mas de un estado intermedio. Por ejemplo:

$$a(\psi \rightarrow \chi) = \sum_{i,j} \langle \chi|i\rangle \langle i|j\rangle \langle j|\psi\rangle = \sum_{i,j} a(\psi \rightarrow j) a(j \rightarrow i) a(i \rightarrow \chi) . \quad (4.12)$$

Notese que las amplitudes se suman, pero no las probabilidades (estas ultimas son obtenidas como el modulo al cuadrado de las amplitudes). Ilustremos esto ultimo por medio del experimento de la doble rendija. En esta experiencia se emiten particulas desde una fuente F, se hacen pasar a traves de una pared con dos rendijas A y B y, finalmente, se detectan en una pantalla, tal como se representa esquematicamente en la figura 1.

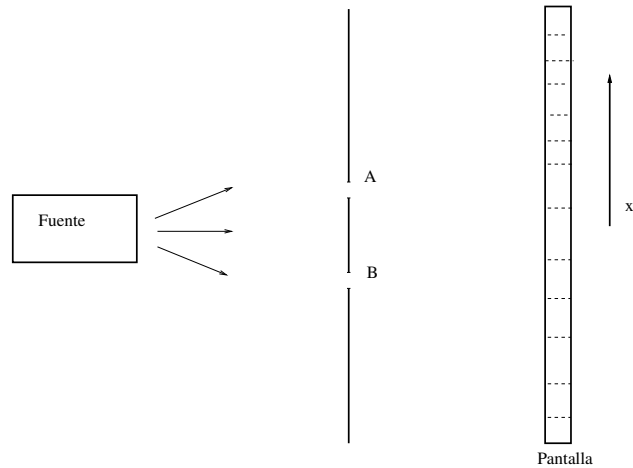


Figure 1: Esquema del experimento de la doble rendija.

Sea  $x$  la coordenada de un punto sobre la pantalla. Aplicando las reglas anteriores para combinar amplitudes, obtenemos que la amplitud de que una partícula llegue de la fuente F al punto  $x$  es:

$$\langle x|\psi\rangle = \langle x|A\rangle \langle A|\psi\rangle + \langle x|B\rangle \langle B|\psi\rangle . \quad (4.13)$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} a(F \rightarrow x) &= a(F \rightarrow A \rightarrow x) + a(F \rightarrow B \rightarrow x) = \\ &= a(F \rightarrow A) a(A \rightarrow x) + a(F \rightarrow B) a(B \rightarrow x) . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Escribamos esta ultima relacion como:

$$\psi(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) , \quad (4.15)$$

siendo:

$$\psi(x) = \langle x|\psi \rangle , \quad \psi_A(x) = \langle x|A \rangle \langle A|\psi \rangle , \quad \psi_B(x) = \langle x|B \rangle \langle B|\psi \rangle . \quad (4.16)$$

La probabilidad de que la partícula sea observada en el punto  $x$  de la pantalla es:

$$\begin{aligned} P_{AB}(x) &= |\psi(x)|^2 = |\psi_A(x) + \psi_B(x)|^2 = \\ &= |\psi_A(x)|^2 + |\psi_B(x)|^2 + \psi_A^*(x)\psi_B(x) + \psi_B^*(x)\psi_A(x) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sean:

$$\begin{aligned} P_A(x) &= |\psi_A(x)|^2 , & P_B(x) &= |\psi_B(x)|^2 , \\ I_{AB}(x) &= \psi_A^*(x)\psi_B(x) + \psi_B^*(x)\psi_A(x) . \end{aligned} \quad (4.18)$$

En terminos de estas cantidades que acabamos de definir la ecuacion (4.17) puede escribirse como:

$$P_{AB}(x) = P_A(x) + P_B(x) + I_{AB}(x) . \quad (4.19)$$

Claramente,  $P_A(x)$  y  $P_B(x)$  representan las distribuciones de probabilidad correspondientes a cuando solo la rendija  $A$  o  $B$  estuviesen abiertas. La funcion  $I_{AB}(x)$  es un termino de interferencia. Para estudiar esta ultima funcion, pongamos  $\psi_A(x)$  y  $\psi_B(x)$  en terminos de su modulo y de su fase:

$$\psi_A = |\psi_A| e^{i\delta_A} , \quad \psi_B = |\psi_B| e^{i\delta_B} . \quad (4.20)$$

Sustituyendo estas expresiones en la formula de  $I_{AB}$  en (4.18), obtenemos:

$$I_{AB} = 2 |\psi_A| |\psi_B| \cos(\delta_A - \delta_B) . \quad (4.21)$$

Asi pues, el termino de interferencia depende de la fase relativa de las amplitudes, es decir de la diferencia  $\delta_A - \delta_B$ .

Observemos que la prediccion clasica seria  $P_{AB} = P_A + P_B$ , es decir la suma de las probabilidades. En la teoria cuantica se suman las amplitudes y luego se obtiene la probabilidad calculando el modulo al cuadrado de la amplitud. Este es el principio

básico de la probabilidad cuántica. La diferencia entre las dos prescripciones es, por supuesto, el término de interferencia  $I_{AB}$ .

Vamos ahora a reinterpretar la probabilidad de que la medida de un observable de como resultado un determinado autovalor  $a$ . Sea  $|\psi\rangle$  el estado inicial. Escribamos su expansión en una base ortonormal de autovectores del operador  $A$ :

$$|\psi\rangle = \sum_n |a_n\rangle \langle a_n|\psi\rangle \equiv \sum_n c_n |a_n\rangle, \quad (4.22)$$

siendo  $c_n = \langle a_n|\psi\rangle$ . Entonces, si  $P(a_n)$  denota la probabilidad de que el resultado de la medida sea  $a_n$ , tenemos:

$$P(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2. \quad (4.23)$$

Es decir la probabilidad  $P(a_n)$  es igual al módulo al cuadrado de la componente de  $|\psi\rangle$  en la base de autovectores  $\{|a_n\rangle\}$ .

Si queremos que el resultado de la medida del observable  $A$  sea siempre el mismo, digamos el autovalor  $a_p$ , se necesita que  $P(a_n)$  sea solo distinto de cero para  $p = n$  y, debido a la condición de normalización, la probabilidad debe de ser igual a uno para dicho valor de  $n$ . Es decir, en este caso debemos de tener  $P(a_n) = \delta_{n,p}$  y, en consecuencia,  $|\psi\rangle = e^{i\delta} |a_p\rangle$ , donde  $\delta \in \mathbb{R}$  es una fase irrelevante que podemos fijar a cero. En definitiva, **para que un estado tenga un valor bien definido de un observable  $A$ , dicho estado debe de ser un autovector del operador  $A$ .**

Observese que si  $\mathcal{P}_{a_n} = |a_n\rangle \langle a_n|$  es el proyector sobre el autovector  $|a_n\rangle$ , la probabilidad puede escribirse como:

$$P(a_n) = \langle a_n|\psi\rangle^* \langle a_n|\psi\rangle = \langle \psi|a_n\rangle \langle a_n|\psi\rangle, \quad (4.24)$$

es decir, la probabilidad del autovalor  $a_n$  puede ponerse como:

$$\boxed{P(a_n) = \langle \psi|\mathcal{P}_{a_n}|\psi\rangle} \quad (4.25)$$

Por otra parte, después de realizar una medida del observable  $A$  y obtener el resultado  $a_n$  el estado cambia como:

$$\boxed{|\psi\rangle \rightarrow \frac{\mathcal{P}_{a_n} |\psi\rangle}{\langle \psi|\mathcal{P}_{a_n}|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}}} \quad (4.26)$$

El cambio del estado que se produce al medir el observable se llama **colapso de la función de onda**.

En las fórmulas anteriores se supone que no hay degeneración en el espectro del operador  $A$ . Vamos a escribir ahora las fórmulas generales. Supongamos que el estado  $|\psi\rangle$  puede expandirse en la base de autovectores como:

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{r=1}^{G(n)} |a_n, r\rangle \langle a_n, r|\psi\rangle \equiv \sum_n \sum_{r=1}^{G(n)} c_{n,r} |a_n, r\rangle. \quad (4.27)$$

Si medimos  $A$  con resultado  $a_n$ , el sistema puede estar en cualquiera de los estados  $|a_n, r\rangle$ , puesto que es proyectado al estado:

$$\sum_{r=1}^{G(n)} |a_n, r\rangle \langle a_n, r | \psi \rangle . \quad (4.28)$$

La probabilidad de que la medida sea  $a_n$  es, por tanto:

$$P(a_n) = \sum_{r=1}^{G(n)} P(a_n, r) = \sum_{r=1}^{G(n)} |\langle a_n, r | \psi \rangle|^2 . \quad (4.29)$$

Podemos tambien escribir esta probabilidad como:

$$P(a_n) = \langle \psi | \mathcal{P}_{a_n} | \psi \rangle , \quad (4.30)$$

siendo ahora el proyector  $\mathcal{P}_{a_n}$ :

$$\mathcal{P}_{a_n} = \sum_{r=1}^{G(n)} |a_n, r\rangle \langle a_n, r| . \quad (4.31)$$

El colapso de la funcion de onda viene dado por (4.26), donde ahora el proyector es (4.31).

Supongamos ahora que repetimos la medida del observable  $A$  muchas veces en el estado  $|\Psi\rangle$ . Es decir que preparamos el estado  $|\Psi\rangle$  muchas veces y luego medimos el valor de  $A$ . Veamos cual seria el valor medio de  $A$ , que denotaremos por  $\langle A \rangle_\Psi$ :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\Psi &= \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n \sum_{r=1}^{G(n)} a_n |\langle a_n, r | \Psi \rangle|^2 = \\ &= \sum_n a_n \sum_{r=1}^{G(n)} \langle \Psi | a_n, r \rangle \langle a_n, r | \Psi \rangle = \sum_n \sum_{r=1}^{G(n)} \langle \Psi | A | a_n, r \rangle \langle a_n, r | \Psi \rangle . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Teniendo en cuenta la formula de resolucion de la unidad, podemos escribir:

$$\boxed{\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A | \Psi \rangle} \quad (4.33)$$

Observemos que para que un sistema pueda estar en un estado con valores bien definidos de dos observables  $A$  y  $B$ , los correspondientes operadores deben de ser diagonalizables simultaneamente y, por lo tanto, deben de conmutar. Si  $[A, B] = 0$  se dice que  $A$  y  $B$  son **observables compatibles**. El maximo conjunto de observables que conmutan se llama **conjunto completo de observables compatibles**. Los autovalores de los operadores de este tipo de conjuntos sirven para etiquetar los estados del sistema.

## 5 Comentarios al postulado 4

En la ecuacion de Schrödinger aparece la constante con dimensiones  $\hbar = h/2\pi$ . Si el hamiltoniano  $H$  tiene unidades de energia, las unidades de  $\hbar$  son:

$$[\hbar] = \text{Energia} \times \text{Tiempo} \rightarrow \text{Accion} . \quad (5.1)$$

$h$  se denomina **constante de Planck** (con frecuencia tambien se llama asi a  $\hbar = h/2\pi$ ). El valor numerico de  $\hbar$  es:

$$\hbar \approx 1.054 \times 10^{-34} \text{ Joules} \times \text{segundo} . \quad (5.2)$$

Este valor nos da una idea de la escala de energias de los fenomenos cuanticos. Cuando  $\hbar$  pueda considerarse cero la teoria cuantica ha de reducirse a la fisica clasica. Este es el denominado **principio de correspondencia**.

Veamos ahora que se **conserva en el tiempo la norma de los vectores de estado** como consecuencia de la hermiticidad del hamiltoniano. Calculemos la derivada temporal de la norma de  $|\psi(t)\rangle$ :

$$\frac{d}{dt} [\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle] = \frac{d}{dt} [\langle \psi(t) |] |\psi(t)\rangle + \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} [|\psi(t)\rangle] . \quad (5.3)$$

La derivada de  $|\psi(t)\rangle$  del segundo termino puede obtenerse de la ecuacion de Schrödinger (1.1). Por otra parte, a partir del hermitico conjugado de la ecuacion de Schrödinger, tenemos:

$$-i \hbar \frac{d \langle \psi(t) |}{dt} = \langle \psi(t) | H^\dagger = \langle \psi(t) | H , \quad (5.4)$$

donde, en el segundo paso, hemos utilizado que  $H$  es hermitico. Utilizado (1.1) y (5.4) en (5.3) se sigue inmediatamente que:

$$\boxed{\frac{d}{dt} [\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle] = 0} \quad (5.5)$$

que es lo que queriamos demostrar. Diremos que la evolucion temporal generada por la ecuacion de Schrödinger es **unitaria**, pues preserva la norma de los estados.

Veamos una consecuencia de lo que acabamos de demostrar. Descompongamos  $|\psi(t)\rangle$  en una base ortogonal  $|n, r\rangle$  de autovalores de algun operador:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,r} |n, r\rangle \langle n, r | \psi(t) \rangle = \sum_{n,r} c_{n,r}(t) |n, r\rangle . \quad (5.6)$$

Como  $\{|n, r\rangle\}$  es una base ortogonal, podemos escribir:

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \sum_{n,r} |c_{n,r}(t)|^2 = \sum_n P_n(t) , \quad (5.7)$$

siendo  $P_n(t)$  la probabilidad de medir el n-esimo autovalor. Dado que  $\sum_n P_n$  es la probabilidad total (que debe de ser igual a uno), la conservacion de la norma implica la conservacion de la probabilidad total en el tiempo.

## 6 Evolucion temporal

La conservacion de la norma sugiere que la evolucion temporal esta generada por un operador unitario  $U(t, t_0)$  que relaciona el estado en el instante  $t_0$  y ese mismo estado en el instante  $t$ :

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle} \quad (6.1)$$

El operador  $U(t, t_0)$  debe de satisfacer las siguientes propiedades:

$$U(t_0, t_0) = 1 \rightarrow \text{obvio de la definicion ,}$$

$$U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0) \rightarrow \text{propiedad de grupo ,}$$

$$U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t) \rightarrow \text{condicion de unitariedad .} \quad (6.2)$$

Encontremos ahora una ecuacion diferencial para  $U(t, t_0)$ . Derivando respecto al tiempo (6.1), obtenemos:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = i\hbar \frac{dU(t, t_0)}{dt} |\psi(t_0)\rangle . \quad (6.3)$$

Pero, segun la ecuacion de Schrödinger (1.1), podemos escribir el primer miembro de (6.3) como:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t) |\psi(t)\rangle = H(t) U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle . \quad (6.4)$$

Comparemos ahora los segundos miembros de (6.3) y (6.4). Dado que el estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  es arbitrario, se sigue que:

$$\boxed{i\hbar \frac{dU(t, t_0)}{dt} = H(t) U(t, t_0)} \quad (6.5)$$

Esta es la ecuacion diferencial que estabamos buscando. Esta ecuacion debe de integrarse con la condicion inicial  $U(t_0, t_0) = 1$ . Si el hamiltoniano  $H$  no depende del tiempo, es facil obtener la solucion de (6.5). Efectivamente, en este caso tenemos:

$$\boxed{U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}} \quad (6.6)$$

Apliquemos estas ideas a la integracion de la ecuacion de Schrödinger (1.1) con la condicion inicial en  $t = 0$  cuando  $H$  no depende explicitamente del tiempo. Esta solucion se obtiene poniendo  $t_0 = 0$  en (6.1) y utilizando (6.6):

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\psi(t=0)\rangle . \quad (6.7)$$

Para poder determinar completamente esta solución formal debemos de especificar como actúa  $H$  sobre el estado inicial  $|\psi(t=0)\rangle$ . Para ello expresemos el vector inicial en términos de los autovectores independientes del tiempo  $|E_n\rangle$  de  $H$ , que satisfacen:

$$H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle . \quad (6.8)$$

Escribamos:

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle , \quad (6.9)$$

siendo  $c_n$  constantes complejas. Observemos que la representación (6.9) puede hacerse siempre porque  $\{|E_n\rangle\}$  es una base del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Como:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |E_n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |E_n\rangle \quad (6.10)$$

la solución buscada es:

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |E_n\rangle} \quad (6.11)$$

Observemos que la dependencia en  $t$  del vector de estado se obtiene haciendo la siguiente substitución en (6.9):

$$|E_n\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |E_n\rangle . \quad (6.12)$$

Los autoestados del hamiltoniano  $|E_n\rangle$  se llaman **estados estacionarios** porque su evolución temporal consiste simplemente en la multiplicación por la fase  $e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$ .

## 7 Teorema de Ehrenfest

Veamos ahora como evolucionan con el tiempo los valores esperados de los operadores. El valor esperado del operador  $A$  en el estado  $|\psi\rangle$  está dado por la ecuación (4.33). Derivando esta expresión respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi = \frac{d\langle \psi |}{dt} A |\psi\rangle + \langle \psi | \frac{\partial A}{\partial t} |\psi\rangle + \langle \psi | A \frac{d|\psi\rangle}{dt} , \quad (7.1)$$

donde hemos supuesto que  $A$  puede depender explícitamente del tiempo. Utilicemos ahora la ecuación de Schrödinger (1.1) y su adjunta (5.4) para evaluar el primer y el último término del segundo miembro de (7.1), que pueden escribirse en la forma:

$$\frac{i}{\hbar} \langle \psi | H A |\psi\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi | A H |\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \psi | [A, H] |\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle_\psi . \quad (7.2)$$

Substituyendo este resultado en (7.1), obtenemos el denominado **Teorema de Ehrenfest**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_\psi - \frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle_\psi} \quad (7.3)$$

Es interesante comparar este resultado con la correspondiente expresion clasica. En efecto, si  $A = A(p, q, t)$  es una funcion en el espacio de fases, tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}_P, \quad (7.4)$$

siendo  $\{A, H\}_P$  el corchete de Poisson del Hamiltoniano clasico  $H$  y de la funcion  $A(p, q, t)$ :

$$\{A, H\}_P \equiv \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}. \quad (7.5)$$

Comparando (7.3) y (7.4), llegamos entonces a la siguiente analogia clasico-cuantica:

$$\boxed{\{A, H\}_P \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [A, H]} \quad (7.6)$$

que puede servir como regla de cuantizacion.

Veamos algunas consecuencias del teorema de Ehrenfest. La primera de ellas es el **teorema de conservacion de la energia**. Para probarlo, consideremos (7.3) con  $A = H$ . Dado que trivialmente  $[H, H] = 0$ , obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \langle H \rangle_\psi = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle_\psi. \quad (7.7)$$

Se sigue por tanto que si el hamiltoniano no depende explicitamente del tiempo, es decir si  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , entonces  $\langle H \rangle_\psi$  es constante, es decir:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = 0} \implies \boxed{\langle H \rangle_\psi = \text{constante}} \implies \boxed{\text{El valor esperado de la energia se conserva}} \quad (7.8)$$

En general, tendremos el siguiente teorema de conservacion para cualquier operador  $A$ :

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \langle [A, H] \rangle_\psi = 0} \implies \boxed{\langle A \rangle_\psi \text{ constante en el tiempo}} \quad (7.9)$$

Es decir, **si un operador que no depende explicitamente del tiempo conmuta con el hamiltoniano, entonces su valor esperado es una constante de movimiento**.

## 8 Incertidumbre estadistica

Dada una distribucion de probabilidad de una variable  $X$ , el valor esperado  $\langle X \rangle$  se define como:

$$\langle X \rangle = \sum_i p_i X_i, \quad (8.1)$$

siendo  $p_i$  la probabilidad de obtener el valor  $X_i$  de  $X$ . Estas probabilidades deben de sumar la unidad, es decir debe de verificarse que:

$$\sum_i p_i = 1 . \quad (8.2)$$

En estadística matemática se define una cantidad que caracteriza como los resultados se desvían del valor esperado. Esta cantidad es la llamada **desviación estándar**  $\sigma_X$ , cuyo cuadrado (la varianza) se define como:

$$\sigma_X^2 = \sum_i p_i (X_i - \langle X \rangle)^2 . \quad (8.3)$$

Desarrollando el cuadrado en esta definición, obtenemos:

$$\sigma_X^2 = \sum_i p_i (X_i^2 - 2X_i \langle X \rangle + \langle X \rangle^2) = \langle X^2 \rangle - 2\langle X \rangle^2 + \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 . \quad (8.4)$$

Es decir, la desviación estándar se puede escribir como:

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}} \quad (8.5)$$

Por analogía en mecánica cuántica se define la **incertidumbre del observable  $A$  en el estado  $|\psi\rangle$**  como:

$$\left(\Delta_\psi A\right)^2 \equiv \langle (A - \langle A \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi = \langle \psi | (A - \langle A \rangle_\psi)^2 | \psi \rangle . \quad (8.6)$$

Desarrollando el cuadrado del segundo miembro como hicimos más arriba para  $\sigma_X$ , obtenemos:

$$\boxed{\Delta_\psi A = \sqrt{\langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2} = \sqrt{\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2}} \quad (8.7)$$

La cantidad  $\Delta_\psi A$  también se denomina **dispersión de  $A$  en  $|\psi\rangle$** . Observemos que, por definición,  $\Delta_\psi A$  es no negativo y si  $\Delta_\psi A = 0$  entonces el resultado de medir  $A$  en el estado  $|\psi\rangle$  es único y, necesariamente,  $|\psi\rangle$  debe de ser un autovector de  $A$ .

## 9 Desigualdad de Heisenberg

Supongamos que tenemos dos observables  $A$  y  $B$  no compatibles, es decir tales que su conmutador  $[A, B]$  no es nulo. Entonces no es posible diagonalizar  $A$  y  $B$  simultáneamente. Sean  $\Delta_\psi A$  y  $\Delta_\psi B$  sus incertidumbres:

$$\left(\Delta_\psi A\right)^2 = \langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2 , \quad \left(\Delta_\psi B\right)^2 = \langle B^2 \rangle_\psi - \langle B \rangle_\psi^2 . \quad (9.1)$$

Escribamos el conmutador  $[A, B]$  como:

$$[A, B] = iC . \quad (9.2)$$

Veamos que si  $A$  y  $B$  son hermiticos, entonces  $C$  tambien lo es. Para ello calculemos el hermitico conjugado del conmutador  $[A, B]$  a partir de la definicion de este ultimo:

$$[A, B]^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = B A - A B = -[A, B] = -iC . \quad (9.3)$$

Por otra parte, tomando el hermitico conjugado de (9.2), llegamos a:

$$[A, B]^\dagger = (iC)^\dagger = -i C^\dagger . \quad (9.4)$$

Comparando estas dos ultimas ecuaciones, se sigue que  $C^\dagger = C$ . Definamos ahora los siguientes operadores con valor esperado nulo:

$$A_0 = A - \langle A \rangle_\psi , \quad B_0 = B - \langle B \rangle_\psi . \quad (9.5)$$

Claramente  $A_0$  y  $B_0$  son hermiticos porque  $A$  y  $B$  lo son y  $\langle A \rangle_\psi$  y  $\langle B \rangle_\psi$  son reales. Ademas,  $[A_0, B_0] = iC$  porque  $\langle A \rangle_\psi$  y  $\langle B \rangle_\psi$  son numeros que conmutan (c-numeros). Consideremos ahora el vector:

$$(A_0 + i\lambda B_0) |\psi\rangle , \quad \lambda \in \mathbb{R} , \quad (9.6)$$

que depende de la variable real  $\lambda$ . La norma de este vector debe de ser no negativa. Calculemosla:

$$\begin{aligned} ||(A_0 + i\lambda B_0)|\psi\rangle||^2 &= \langle \psi | (A_0 - i\lambda B_0) (A_0 + i\lambda B_0) | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | A_0 A_0 | \psi \rangle + i\lambda \langle \psi | A_0 B_0 | \psi \rangle - i\lambda \langle \psi | B_0 A_0 | \psi \rangle + \lambda^2 \langle \psi | B_0 B_0 | \psi \rangle = \\ &= \langle A_0^2 \rangle_\psi + i\lambda \langle \psi | [A_0, B_0] | \psi \rangle + \lambda^2 \langle B_0^2 \rangle_\psi = \\ &= \langle A_0^2 \rangle_\psi - \lambda \langle C \rangle_\psi + \lambda^2 \langle B_0^2 \rangle_\psi \equiv p(\lambda) . \end{aligned} \quad (9.7)$$

El polinomio cuadratico  $p(\lambda)$  definido en el ultimo paso en (9.7) tiene la forma:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= a\lambda^2 + b\lambda + c , \\ a &= \langle B_0^2 \rangle_\psi \geq 0 , \quad b = -\langle C \rangle_\psi \in \mathbb{R} , \quad c = \langle A_0^2 \rangle_\psi \geq 0 . \end{aligned} \quad (9.8)$$

De la no negatividad de la norma calculada en (9.7) se sigue que  $p(\lambda) \geq 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Estudiemos  $p(\lambda)$  como funcion de  $\lambda$ . Supongamos en primer lugar que  $a > 0$ .

Entonces se sigue que  $p(\lambda) \rightarrow +\infty$  si  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ . Además  $p(\lambda)$  tiene un mínimo para un valor finito  $\lambda_0$  de  $\lambda$ , dado por:

$$p'(\lambda_0) = 0 \quad \rightarrow \quad 2a\lambda_0 + b = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_0 = -\frac{b}{2a} . \quad (9.9)$$

El valor de  $p(\lambda)$  en el mínimo es:

$$p(\lambda_0) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac) . \quad (9.10)$$

Si se verificase que  $b^2 - 4ac > 0$ , entonces  $p(\lambda_0)$  sería negativo y, en consecuencia,  $p(\lambda)$  sería negativo para un rango finito de valores de  $\lambda$ , lo cual sabemos que no puede suceder. En consecuencia, el discriminante  $b^2 - 4ac$  debe de ser menor o igual a cero. Teniendo en cuenta los valores de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  escritos en (9.8), este resultado implica que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\langle C \rangle_\psi^2 - 4 \langle B_0^2 \rangle_\psi \langle A_0^2 \rangle_\psi \leq 0 . \quad (9.11)$$

Tomando la raíz cuadrada, llegamos a:

$$\sqrt{\langle A_0^2 \rangle_\psi} \sqrt{\langle B_0^2 \rangle_\psi} \geq \frac{|\langle C \rangle_\psi|}{2} . \quad (9.12)$$

Si  $a = 0$ , la condición  $p(\lambda) = b\lambda + c \geq 0$  solo se puede verificar si  $b = -\langle C \rangle_\psi = 0$  y, entonces (9.12) se satisface trivialmente. Así pues la desigualdad (9.12) se cumple en todos los casos. De las definiciones de  $A_0$  y  $B_0$  se sigue que:

$$\langle A_0^2 \rangle_\psi = (\Delta_\psi A)^2 , \quad \langle B_0^2 \rangle_\psi = (\Delta_\psi B)^2 . \quad (9.13)$$

Obtenemos así la **desigualdad de Heisenberg**:

$$\boxed{\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle_\psi \right|} \quad (9.14)$$

que da una cota inferior para el producto de las dispersiones de dos operadores en un mismo estado.

### Observaciones

-Si  $\langle [A, B] \rangle_\psi = 0$ , lo que sucede si  $A$  y  $B$  conmutan y son observables compatibles, la desigualdad (9.14) es trivial pues solamente nos dice que el producto de dos cantidades no negativas es también no negativa. En cambio, si  $\langle [A, B] \rangle_\psi$  es no nulo, **la desigualdad de Heisenberg (9.14) establece una correlación no trivial entre las medidas de  $A$  y  $B$**  en el estado  $|\psi\rangle$ . Sabemos que si  $A$  y  $B$  no conmutan, no son simultáneamente diagonalizables y, por lo tanto, no es posible encontrar un conjunto completo de estados en los cuales las incertidumbres de  $A$  y  $B$  sean simultáneamente cero. En consecuencia, los resultados de las medidas de

ambos observables han de estar correlacionados. La ecuacion (9.14) cuantifica dicha correlacion.

-Las dispersiones  $\Delta_\psi A$  y  $\Delta_\psi B$  no tienen nada que ver con los errores experimentales de medida o con las resoluciones de los aparatos. Si la resolucion del aparato en la medida del observable  $A$  es  $\delta A$ , es posible tener  $\delta A \ll \Delta_\psi A$ , pero aun asi la dispersion de los resultados no sera mas pequeña que  $\Delta_\psi A$ . La relacion de incertidumbre es una caracteristica intrinseca de la mecanica cuantica debido a su naturaleza estocastica.

-La cota inferior de  $\Delta_\psi A \Delta_\psi B$  depende del estado  $|\psi\rangle$  en general. Puede que  $C \neq 0$  (y  $A$  y  $B$  entonces no conmutan) y, sin embargo,  $\langle C \rangle_\psi = 0$  para algun estado  $|\psi\rangle$ . En ese caso la desigualdad de Heisenberg se verifica trivialmente y no da ninguna informacion.

## 9.1 La desigualdad temporal de Heisenberg

Sea  $A$  un observable que no depende del tiempo explicitamente. Tomemos  $B = H$ , siendo  $H$  el operador hamiltoniano, en la desigualdad de Heisenberg:

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi H \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, H] \rangle_\psi \right|. \quad (9.15)$$

Por el teorema de Ehrenfest, sabemos que se verifica:

$$\langle [A, H] \rangle_\psi = i \hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi \quad (9.16)$$

por lo tanto la desigualdad (9.15) puede escribirse como:

$$\Delta_\psi H \Delta_\psi A \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi \right|. \quad (9.17)$$

Definamos ahora la cantidad  $\tau_\psi(A)$  como:

$$\tau_\psi(A) \equiv \frac{\Delta_\psi A}{\left| \frac{d}{dt} \langle A \rangle_\psi \right|}. \quad (9.18)$$

Esta cantidad representa el tiempo caracteristico en el cual el valor esperado del observable  $A$  en el estado  $|\psi\rangle$  cambia una cantidad igual a la dispersion  $\Delta_\psi A$ . En terminos de  $\tau_\psi(A)$  la desigualdad (9.15) puede escribirse como:

$$\Delta_\psi H \tau_\psi(A) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.19)$$

Esta relacion se escribe a veces como  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$  y se denomina **relacion de incertidumbre tiempo-energia**. Observemos que  $\tau_\psi(A)$  es el tiempo en el cual, al medir el observable  $A$ , podemos deducir que ha tenido lugar un cambio en el estado  $|\psi\rangle$ . Por esta razon  $\tau_\psi(A)$  se llama a veces la **vida media** de  $|\psi\rangle$  con respecto al observable  $A$ . Esto sugiere que  $\tau_\psi(A) \equiv \tau$  debe de ser interpretado como la vida media de un estado excitado y, por tanto,  $\Delta E$  sera la incertidumbre en energia de dicho estado.

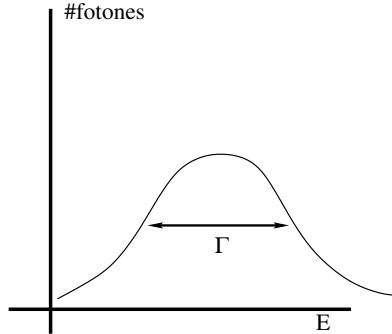


Figure 2: Los fotones emitidos por un atomo excitado tienen una distribucion en energia cuya anchura  $\Gamma$  es proporcional al inverso de su vida media  $\tau$ , tal como se indica en la ecuacion (9.20).

Si  $\Delta E = 0$  la desigualdad de Heisenberg implica que  $\tau = \infty$  y el sistema esta en un estado estacionario. Esto sucede, por ejemplo, cuando un atomo esta en su estado de minima energia (es decir en su estado fundamental). Si el atomo esta excitado la interaccion con las fluctuaciones del campo electromagnetico hace que acabe emitiendo un foton al cabo de un cierto tiempo de vida media  $\tau$ . El foton emitido no es monocromatico, sino que su espectro de energia tiene una cierta dispersion  $\Delta A = \hbar\Gamma$ , donde  $\Gamma$  se denomina la **anchura** de la desintegracion. La igualdad de Heisenberg nos dice:

$$\Gamma \tau \sim 1 . \quad (9.20)$$

En la figura 2 se representa esquematicamente la distribucion en energia de los fotones emitidos. Observese que  $\Delta E$  no es lo mismo que  $\Delta H$ , definido como:

$$\Delta H = (\text{Energia estado excitado}) - (\text{Energia estado fundamental}) . \quad (9.21)$$

Normalmente  $\hbar\Gamma \ll \Delta H$ , es decir la anchura del pico es mucho mas pequeña que la energia del pico, es decir de su centro.

## 10 Imagenes de Schrödinger y Heisenberg

La evolucion temporal de un sistema puede ser descrita de diferentes formas en mecanica cuantica. Cada una de estas formas se denomina una **imagen**. Hasta

ahora nos hemos restringido a la denominada **imagen de Schrödinger**, en la cual el vector de estado cambia con el tiempo y los operadores que no dependen explícitamente del tiempo son independientes del tiempo. Veamos ahora otra imagen, la **imagen de Heisenberg**, en la cual los vectores de estado son independientes del tiempo y los operadores dependen de  $t$ . Sea  $A(t)$  un operador en la imagen de Schrödinger que, para mayor generalidad, supondremos que puede depender explícitamente del tiempo. El operador en la imagen de Heisenberg, denotado por  $A_H(t)$  se define como:

$$A_H(t) \equiv U(t_0, t) A(t) U(t, t_0) , \quad (10.1)$$

siendo  $U(t, t_0)$  el operador de evolución temporal ( $U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)$ ). Observemos que:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_0\rangle , \quad (10.2)$$

siendo  $|\psi_0\rangle \equiv |\psi(t = t_0)\rangle$ . En la imagen de Heisenberg  $|\psi_0\rangle$  es el estado del sistema para todos los instantes de tiempo, es decir en esta imagen el estado no cambia con  $t$ . Observemos que:

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi_0| U(t_0, t) , \quad (10.3)$$

y, por tanto, el valor medio del operador  $A$  vale:

$$\langle A \rangle(t) = \langle\psi(t)| A |\psi(t)\rangle = \langle\psi_0| U(t_0, t) A U(t, t_0) |\psi_0\rangle = \langle\psi_0| A_H(t) |\psi_0\rangle . \quad (10.4)$$

Es decir:

$$\langle A \rangle(t) = \langle A_H(t) \rangle . \quad (10.5)$$

Por consiguiente, los valores esperados de los operadores, que son las cantidades físicamente relevantes, son los mismos en las dos imágenes. Calculemos ahora la variación de  $A_H(t)$  con el tiempo:

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{dU(t_0, t)}{dt} A U(t, t_0) + U(t_0, t) A \frac{dU(t, t_0)}{dt} + U(t_0, t) \frac{\partial A}{\partial t} U(t, t_0) . \quad (10.6)$$

Pero, si derivamos la relación  $U(t_0, t) U(t, t_0) = 1$  obtenemos:

$$\frac{dU(t_0, t)}{dt} U(t, t_0) + U(t_0, t) \frac{dU(t, t_0)}{dt} = 0 . \quad (10.7)$$

Multiplicamos esta última expresión por  $U(t_0, t)$  por la derecha y usamos que  $U(t_0, t)$  es el inverso de  $U(t, t_0)$ :

$$\frac{dU(t_0, t)}{dt} = -U(t_0, t) \frac{dU(t, t_0)}{dt} U(t_0, t) = \frac{i}{\hbar} U(t_0, t) H U(t, t_0) U(t_0, t) , \quad (10.8)$$

donde, en el último paso, hemos utilizado (6.5). Teniendo en cuenta que  $U(t, t_0) U(t_0, t) = 1$ , llegamos a:

$$\frac{dU(t_0, t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} U(t_0, t) H . \quad (10.9)$$

Utilizemos ahora (10.9) para evaluar el primer termino del segundo miembro de (10.6):

$$\begin{aligned} \frac{dU(t_0, t)}{dt} A U(t, t_0) &= \frac{i}{\hbar} U(t_0, t) H A U(t, t_0) = \\ &= \frac{i}{\hbar} U(t_0, t) H U(t, t_0) U(t_0, t) A U(t, t_0) = \frac{i}{\hbar} H_H(t) A_H(t) . \end{aligned} \quad (10.10)$$

De forma similar, puede probarse que:

$$U(t_0, t) A \frac{dU(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} A_H(t) H_H(t) . \quad (10.11)$$

Si definimos:

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_H \equiv U(t_0, t) \frac{\partial A}{\partial t} U(t, t_0) , \quad (10.12)$$

podemos escribir (10.6) en la forma:

$$\boxed{\frac{dA_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_H(t), A_H(t)] + \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_H} \quad (10.13)$$

Esta ecuacion en la imagen de Heisenberg se puede obtener de la ecuacion clasica (7.4) si se hace la substitucion (7.6).

## 11 Sistemas de dos estados

Consideremos un sistema simple que puede ser descrito por un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  con una base constituida por dos estados, es decir por un espacio de Hilbert bidimensional. Veremos mas adelante que ciertos sistemas fisicos pueden ser representados de esta manera. Sean  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  los estados de una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , en la cual el hamiltoniano  $H$  toma la forma:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} . \quad (11.1)$$

Como  $H^\dagger = H$ , necesariamente  $H_{12} = H_{21}^*$  y  $H_{11}, H_{22} \in \mathbb{R}$ . Siguiendo nuestro analisis general de las matrices  $2 \times 2$ , los autovalores de la energia son:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ H_{11} + H_{22} \pm \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2} \right] . \quad (11.2)$$

Sean  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  los autovectores de  $H$  correspondientes a los autovalores  $E_+$  y  $E_-$ :

$$|+\rangle \rightarrow \text{Energia } E_+ , \quad |-\rangle \rightarrow \text{Energia } E_- . \quad (11.3)$$

Por ser autoestados del Hamiltoniano, estos estados son estacionarios. Sea  $|\psi\rangle = |\psi(t=0)\rangle$  el estado en el que se encuentra el sistema en el instante inicial  $t=0$ . En general  $|\psi\rangle$  puede representarse como:

$$|\psi\rangle = a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle , \quad (11.4)$$

siendo los coeficientes  $a_+$  y  $a_-$ :

$$a_+ = \langle +|\psi\rangle , \quad a_- = \langle -|\psi\rangle . \quad (11.5)$$

En cualquier instante  $t \neq 0$ , el estado  $|\psi(t)\rangle$  viene dado por:

$$|\psi(t)\rangle = a_+ e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t} |+\rangle + a_- e^{-\frac{i}{\hbar} E_- t} |-\rangle . \quad (11.6)$$

Veamos varios casos y estudiemos su interpretacion.

### **Caso 1**

**El Hamiltoniano  $H$  es diagonal**, es decir  $H_{12} = H_{21} = 0$ .

En este caso las energias son:

$$E_+ = H_{11} , \quad E_- = H_{22} . \quad (11.7)$$

Por tanto en los sistemas con este tipo de Hamiltoniano los vectores de la base  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  son estados estacionarios ( $|+\rangle = |1\rangle$ ,  $|-\rangle = |2\rangle$ ) y evolucionan con el tiempo simplemente adquiriendo una fase.

### **Caso 2**

**El Hamiltoniano  $H$  no es diagonal** ( $H_{12} \neq 0$ ).

Supongamos, por concretar, que inicialmente en  $t=0$  el sistema esta en el estado  $|1\rangle$ . Despues de un tiempo pequeño  $\delta t$  el estado sera  $|\psi(\delta t)\rangle$  y la ecuacion de Schrödinger nos da:

$$i\hbar \frac{|\psi(\delta t)\rangle - |1\rangle}{\delta t} = H |1\rangle , \quad (11.8)$$

donde, en el primer miembro, hemos aproximado la derivada temporal por un cociente. Despejando de esta ecuacion  $|\psi(\delta t)\rangle$ , obtenemos:

$$\boxed{|\psi(\delta t)\rangle = |1\rangle - \frac{i}{\hbar} \delta t H |1\rangle} . \quad (11.9)$$

La probabilidad de transicion al estado  $|2\rangle$  esta determinada por la amplitud:

$$\langle 2|\psi(\delta t)\rangle = \langle 2|1\rangle - \frac{i}{\hbar} \delta t \langle 2|H|1\rangle . \quad (11.10)$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  y la definicion de los elementos de matriz de  $H$ , obtenemos

$$\langle 2|\psi(\delta t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H_{21}\delta t . \quad (11.11)$$

Asi pues:

Los elementos no diagonales de  $H$  determinan las amplitudes de transicion entre los estados de la base.

### Ejemplo: el ion de la molecula de hidrogeno

Consideremos un sistema de dos protones y un  $e^-$ , es decir el ion de la molecula de hidrogeno. Si despreciamos la vibracion y rotacion de la molecula, el sistema se puede tratar como un problema de dos estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ , en los cuales el  $e^-$  esta localizado cerca de cada uno de los protones. Especificamente:

$|1\rangle \rightarrow e^-$  localizado alrededor del proton 1

$|2\rangle \rightarrow e^-$  localizado alrededor del proton 2 . (11.12)

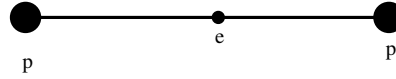


Figure 3: El ion  $H_2^+$  es una molecula lineal con dos protones y un electron que se mueve entre ambos.

Podemos tomar la siguiente forma aproximada del hamiltoniano en la base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} , \quad (11.13)$$

siendo  $E_0$  la energia de un electron ligado a un proton sin la presencia del otro proton y  $A > 0$  la amplitud de probabilidad de que un  $e^-$  pase de un proton al otro. Aplicando nuestra formula general para los autovalores de una matriz  $2 \times 2$ , obtenemos que los valores propios de la energia son:

$$E_{\pm} = E_0 \pm A . \quad (11.14)$$

Obtengamos ahora los autoestados de  $H$ . Observemos que el operador hamiltoniano actua sobre los estados de la base como:

$$\begin{aligned} H|1\rangle &= H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ -A \end{pmatrix} , \\ H|2\rangle &= H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \\ E_0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (11.15)$$

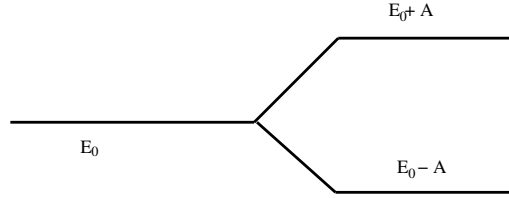


Figure 4: Debido a los terminos no diagonales del hamiltoniano  $H$  en (11.13) se rompe la degeneracion entre los niveles de energia.

En notacion de Dirac, podemos escribir este ultimo resultado como:

$$H|1\rangle = E_0|1\rangle - A|2\rangle, \quad H|2\rangle = -A|1\rangle + E_0|2\rangle. \quad (11.16)$$

Es facil deducir de esta ultima ecuacion que los estados propios de  $H$  son:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \mp |2\rangle), \quad (11.17)$$

tal como se comprueba facilmente:

$$\begin{aligned} H|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|1\rangle - H|2\rangle) = (E_0 + A)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) = E_+|+\rangle, \\ H|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|1\rangle + H|2\rangle) = (E_0 - A)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) = E_-|-\rangle. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Expresemos ahora  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  en terminos de los estados estacionarios  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ :

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle - |+\rangle). \quad (11.19)$$

Supongamos que el  $e^-$  este localizado en el instante inicial  $t = 0$  cerca del proton 1, es decir que esta en el estado  $|1\rangle$  en  $t = 0$ :

$$|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle). \quad (11.20)$$

Puesto que  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  son estados estacionarios, el estado para cualquier instante  $t \geq 0$  es:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}|+\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}|-\rangle\right). \quad (11.21)$$

La amplitud de transicion del  $e^-$  al proton 2 sera:

$$a(1 \rightarrow 2; t) = \langle 2|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}\langle 2|+\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\langle 2|-\rangle\right). \quad (11.22)$$

Dado que:

$$\langle 2|+\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle 2|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (11.23)$$

la amplitud  $a(1 \rightarrow 2; t) = \langle 2 | \psi(t) \rangle$  es:

$$a(1 \rightarrow 2; t) = -\frac{1}{2} \left( e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E_- t} \right). \quad (11.24)$$

La correspondiente probabilidad es:

$$P_{1 \rightarrow 2}(t) = |a(1 \rightarrow 2; t)|^2. \quad (11.25)$$

Teniendo en cuenta (11.24), obtenemos:

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow 2}(t) &= \frac{1}{4} \left| e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E_- t} \right|^2 = \frac{1}{4} \left| 1 - e^{\frac{i}{\hbar} (E_+ - E_-) t} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{E_+ - E_-}{\hbar} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Utilizando que  $\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos x)$ , podemos escribir la probabilidad de la transición  $1 \rightarrow 2$  como:

$$\boxed{P_{1 \rightarrow 2}(t) = \text{sen}^2 \left[ \frac{E_+ - E_-}{2\hbar} t \right]} \quad (11.27)$$

Como  $E_+ - E_- = 2A$ , podemos escribir esta ultima expresion como:

$$\boxed{P_{1 \rightarrow 2}(t) = \text{sen}^2 \frac{At}{\hbar}} \quad (11.28)$$

Asi pues el electron oscila entre los dos protones con una frecuencia  $\omega = A/\hbar$ . Este comportamiento oscilatorio es un caso particular de las llamadas **oscilaciones de Rabi**. En el caso que acabamos de estudiar las oscilaciones estan inducidas por los elementos no diagonales del hamiltoniano. En otros casos pueden estar inducidas (y controladas) por un campo exterior.

## 12 Particulas de espin $\frac{1}{2}$

Estudiemos la relacion entre el momento angular y el momento magnetico en el contexto de la fisica clasica. Consideremos una linea de corriente (espira) cuadrada en un campo magnetico  $\vec{B}$ , tal como se muestra en la figura 5. El momento de la fuerza ejercida por el campo magnetico sobre la espira es:

$$\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (12.1)$$

donde  $\vec{\mu}$  es el momento magnetico, que viene dado por:

$$\vec{\mu} = \frac{IA}{c} \vec{e}_\perp, \quad (12.2)$$

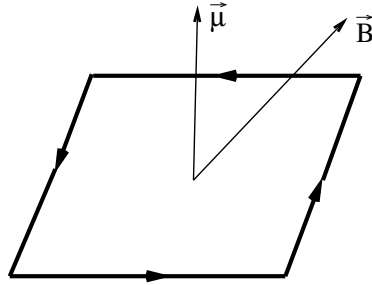


Figure 5: Espira cuadrada bajo la accion de un campo magnetico  $\vec{B}$ .

siendo  $c$  la velocidad de la luz y:

$I \rightarrow$  intensidad de corriente ,

$A \rightarrow$  area encerrada por la espira ,

$\vec{e}_\perp \rightarrow$  vector unitario ortogonal a la espira . (12.3)

El momento  $\vec{T}$  trata de alinear la espira de modo que  $\vec{\mu}$  y  $\vec{B}$  sean paralelos. Obtengamos la energia potencial asociada a la interaccion entre el campo magnetico y la espira. Claramente, como se sigue de (12.1), el momento  $\vec{T}$  depende del angulo  $\theta$  entre  $\vec{B}$  y  $\mu$ :

$$|\vec{T}| = \mu B \text{sen}\theta \equiv T(\theta) . \quad (12.4)$$

La energia potencial es:

$$H_{int} = \int T(\theta) d\theta = \mu B \int \text{sen}\theta d\theta = -\mu B \cos\theta . \quad (12.5)$$

Puesto que  $\mu B \cos\theta = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$  obtenemos:

$$\boxed{H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}} \quad (12.6)$$

A partir de esta formula deducimos que, efectivamente, la energia se minimiza cuando  $\vec{\mu}$  y  $\vec{B}$  son paralelos.

Las formulas anteriores son validas para cualquier espira (no solamente cuadrada) si es suficientemente pequena. Apliquemos estos resultados al caso de una carga puntual  $q$  de masa  $m$  que se mueve en una orbita circular de radio  $r$ . Sea  $\tau$  el periodo del movimiento circular. Entonces:

$$v \tau = 2\pi r \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi r}{v} , \quad (12.7)$$

siendo  $v$  la velocidad de la carga. La intensidad de corriente sera:

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{qv}{2\pi r} . \quad (12.8)$$

Por tanto, aplicando la ecuacion (12.2), el momento magnetico  $\mu$  es:

$$\mu = \frac{I \pi r^2}{c} = \frac{q v}{2\pi r} \frac{\pi r^2}{c} = \frac{q}{2mc} m v r . \quad (12.9)$$

Teniendo en cuenta que el momento angular  $L$  de la particula es:

$$L = m v r, \quad (12.10)$$

obtenemos:

$$\mu = \frac{q}{2mc} L . \quad (12.11)$$

Como  $\vec{\mu}$  y  $\vec{L}$  son paralelos, podemos escribir la siguiente relacion vectorial:

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L}} \quad (12.12)$$

La razon entre  $\vec{\mu}$  y  $\vec{L}$  se llama **razon giromagnetica** y se denota por  $\gamma$ . Asi pues, tenemos:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}, \quad \gamma = \frac{q}{2mc} . \quad (12.13)$$

En definitiva, concluimos que:

Todo momento angular  $\vec{L}$  de una carga lleva asociado un momento magnetico  $\vec{\mu}$ . La relacion entre ambos viene dada por la razon giromagnetica.

Experimentalmente se demuestra que las particulas elementales tienen un momento angular intrinseco no asociado al movimiento de la particula. Este momento angular intrinseco se denomina **espin** y da lugar a un magnetismo intrinseco determinado por el momento magnetico. La relacion entre ambos (espin y momento magnetico) esta determinada por la llamada **razon giromagnetica**, que se parametriza como:

$$\boxed{\gamma = g \frac{q}{2mc}} \quad (12.14)$$

siendo  $g$  un factor que depende de la particula elemental. Segun se sigue de la ecuacion (12.13), el factor  $g$  para una particula puntual clasica deberia ser igual a 1. Sin embargo para el electron y el proton el factor  $g$  toma los valores:

$$g_{electron} \approx 2, \quad g_{proton} \approx 5.59 . \quad (12.15)$$

Esta discrepancia con los valores clasicos es una primera manifestacion del caracter especificamente cuantico del momento magnetico intrinseco. Indiquemos que incluso el neutron que no tiene carga, tiene sin embargo momento magnetico.

## El experimento de Stern y Gerlach

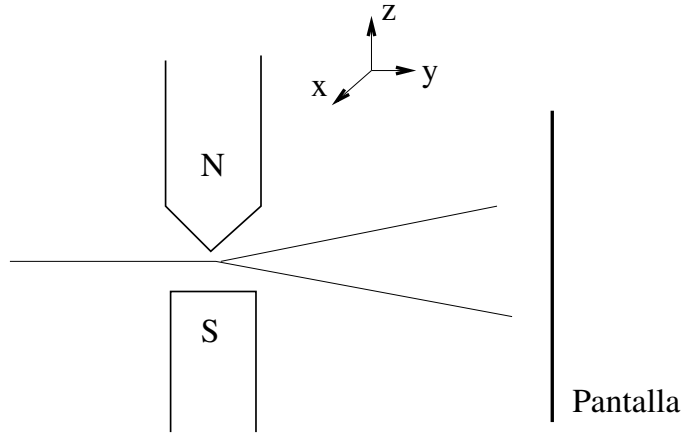


Figure 6: En el experimento de Stern y Gerlach los atomos son desviados tras atravesar un campo magnetico.

En 1921 Stern y Gerlach hicieron pasar un haz colimado de atomos de plata a traves de un campo magnetico siguiendo el esquema de la figura 6. El campo magnetico esta dirigido a lo largo del eje  $z$ . Este campo es no uniforme pues  $B_z$  depende de la coordenada  $z$ . Los atomos de plata tienen momento magnetico pero son electricamente neutros. Desde el punto de vista de las fuerzas magneticas es como si los electrones estuviesen pasando a lo largo del campo magnetico. Dado que la energia potencial es  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ , la fuerza es:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad \rightarrow \quad F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (12.16)$$

Esta fuerza desvia los atomos dependiendo de  $\mu_z$ , una vez que  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  esta fijado. Al realizar el experimento se observa que:

-Si el iman no esta encendido, es decir si  $B = 0$ , los atomos llegan a la pantalla en la vecindad de un punto.

-Si, por el contrario, encendemos el iman, los atomos llegan a la pantalla en dos puntos simetricamente situados respecto al punto correspondiente al punto en donde impactaban cuando  $\vec{B} = 0$ . Esto no es lo que esperaríamos clasicamente si  $\mu_z$  pudiese tomar una distribucion continua de valores debido a las posibles orientaciones de los atomos.

El resultado de esta experiencia nos dice que  $\mu_z$ , y el correspondiente momento angular intrinseco (espin)  $S_z$ , solo puede tomar dos valores, que son:

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}. \quad (12.17)$$

Por consiguiente, tenemos un sistema de dos niveles:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{S_z = +\frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \quad \text{estado} \rightarrow |+\rangle \quad \rightarrow \quad \text{espin hacia arriba}} \\
 \boxed{S_z = -\frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \quad \text{estado} \rightarrow |-\rangle \quad \rightarrow \quad \text{espin hacia abajo}}
 \end{array} \quad (12.18)$$

En la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  podemos escribir el hamiltoniano  $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -B\gamma S_z$  como:

$$H = \begin{pmatrix} -\mu B & 0 \\ 0 & \mu B \end{pmatrix}, \quad (12.19)$$

siendo  $\mu = \gamma \hbar/2$ . Vamos ahora a encontrar la forma del hamiltoniano cuando el campo magnetico tiene una direccion arbitraria. Dado que la direccion del eje  $z$  no tiene nada de especial, debemos de requerir que haya dos estados estacionarios de energias  $\pm\mu|\vec{B}|$ . Por tanto, los autovalores de  $H$  deben de ser:

$$E_{\pm} = \mp\mu|\vec{B}| = \mp\mu\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}. \quad (12.20)$$

Escribamos el hamiltoniano que estamos buscando de la forma general:

$$H = \begin{pmatrix} H_{++} & H_{+-} \\ H_{+-}^* & H_{--} \end{pmatrix}, \quad (12.21)$$

donde ya hemos impuesto que  $H^\dagger = H$ . Vamos a imponer tambien que  $H$  sea lineal en las componentes de  $\vec{B}$  y que se reduzca a la forma diagonal (12.19) cuando  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ . Esta claro que  $H_{+-}$  solo debe de depender de  $B_x$  y  $B_y$ . Los autovalores de la matriz  $H$  en general son:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ H_{++} + H_{--} \mp \sqrt{(H_{++} - H_{--})^2 + 4|H_{+-}|^2} \right]. \quad (12.22)$$

Puesto que  $E_+ + E_-$  deberia anularse, se tiene que verificar que  $H_{++} + H_{--} = 0$ . Esta condicion se verifica cuando  $B_x = B_y = 0$ . Es natural pensar que  $B_x$  y  $B_y$  solo contribuyen a los elementos de  $H$  fuera de la diagonal. Asi pues, tomemos:

$$H_{++} = -\mu B_z, \quad H_{--} = \mu B_z. \quad (12.23)$$

Como entonces, se tiene que  $H_{++} - H_{--} = -2\mu B_z$ , los autovalores de la energia son:

$$E_{\pm} = \mp\sqrt{|H_{+-}|^2 + \mu^2 B_z^2}. \quad (12.24)$$

Comparando con la expresion buscada (12.20), debemos de imponer que:

$$|H_{+-}|^2 = \mu^2 (B_x^2 + B_y^2). \quad (12.25)$$

Esta ecuacion puede resolverse como:

$$H_{+-} = -\mu(B_x - iB_y) . \quad (12.26)$$

Asi pues,  $H$  toma la forma:

$$H = \begin{pmatrix} -\mu B_z & -\mu(B_x - iB_y) \\ -\mu(B_x + iB_y) & \mu B_z \end{pmatrix} . \quad (12.27)$$

Observemos que  $H$  puede ponerse en terminos de las matrices de Pauli como:

$$\boxed{H = -\mu \vec{B} \cdot \vec{\sigma}} \quad (12.28)$$

Por tanto el momento magnetico de la particula es:

$$\boxed{\vec{\mu} = \mu \vec{\sigma}} \quad (12.29)$$

Recordemos que el momento magnetico  $\vec{\mu}$  esta relacionado con el espin  $\vec{S}$  a traves del coeficiente giromagnetico  $\gamma$  ( $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ ), siendo  $\gamma = g \frac{q}{2mc}$ . Por consiguiente, en terminos del espin  $\vec{S}$ , el hamiltoniano  $H$  esta dado por:

$$H = -\gamma \vec{B} \cdot \vec{S} . \quad (12.30)$$

Hemos deducido mas arriba en la ecuacion (12.28) que  $H = -\mu \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$ . Comparando (12.28) y (12.30) se sigue que el operador de espin debe de ser proporcional a las matrices de Pauli  $\vec{\sigma}$ . Experimentalmente sabemos que las componentes del espin a lo largo de cualquier direccion deben de ser  $\pm \hbar/2$ . Estos deberian de ser los autovalores de las tres componentes  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  del operador espin. Puesto que los autovalores de las matrices  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son  $\pm 1$ , esta claro que podemos identificar el operador de espin  $\vec{S}$  con:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}} \quad (12.31)$$

Sustituyendo esta expresion de  $\vec{S}$  en la formula que da  $H$ , obtenemos:

$$H = -\gamma \vec{B} \cdot \vec{S} = -\frac{\gamma \hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} . \quad (12.32)$$

Por otra parte, comparando con la formula  $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ , deducimos que el momento magnetico  $\vec{\mu}$  esta representando por el operador:

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{\gamma \hbar}{2} \vec{\sigma} = \frac{g q \hbar}{4mc} \vec{\sigma}} \quad (12.33)$$

Los autovalores de  $|\vec{\mu}|$  son:

$$|\vec{\mu}| = \frac{g |q| \hbar}{4mc} . \quad (12.34)$$

Consideremos, en concreto, que nuestra partícula sea un electrón ( $|q| = e$ ,  $m = m_e$ ). Definamos el magnetón de Bohr  $\mu_B$  como:

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e c} \approx 0.6 \cdot 10^{-8} \frac{eV}{\text{Gauss}} . \quad (12.35)$$

Entonces, el momento magnético del electrón es:

$$\mu_e = \frac{g}{2} \mu_B . \quad (12.36)$$

Dado que  $g \approx 2$  para el  $e^-$ , deducimos que el momento magnético del electrón es justamente igual al magnetón de Bohr y el correspondiente operador momento magnético se obtiene de la fórmula general poniendo  $g = 2$  y  $q = -e$ :

$$\boxed{\vec{\mu}_e = -\frac{e \hbar}{2m_e c} \vec{\sigma}} \quad (12.37)$$

Escribamos las componentes del vector campo magnético como:

$$B_x = B \sin \theta \cos \phi , \quad B_y = B \sin \theta \sin \phi \quad B_z = B \cos \theta , \quad (12.38)$$

y definamos el vector unitario  $\vec{n}$  en la dirección de  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = B \vec{n} , \quad B = |\vec{B}| . \quad (12.39)$$

Las componentes de  $\vec{n}$  son:

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi , \sin \theta \sin \phi , \cos \theta) . \quad (12.40)$$

Tal como se ilustra en la figura 7,  $\vec{n}$  es el vector unitario en la dirección radial. Dado que

$$B_x - iB_y = B \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) = B e^{-i\phi} \sin \theta , \quad (12.41)$$

y, tomando el complejo conjugado,  $B_x + iB_y = B e^{i\phi} \sin \theta$ , el hamiltoniano del sistema puede escribirse como:

$$H = -\mu B \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = -\mu B \vec{\sigma} \cdot \vec{n} . \quad (12.42)$$

Vamos a encontrar los autovectores de  $\sigma_{\vec{n}} \equiv \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$  (o, equivalentemente, los del hamiltoniano (12.42)). Como sabemos los autovalores  $\lambda$  de  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$  son independientes de  $\vec{n}$  e iguales a  $\lambda = \pm 1$ , pues  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = \vec{n}^2 = 1$ . Sean:

$$\boxed{\begin{array}{l} |+, \vec{n}\rangle \quad \rightarrow \quad \text{autoestado de } \sigma_{\vec{n}} \text{ con } \lambda = +1 \\ |-, \vec{n}\rangle \quad \rightarrow \quad \text{autoestado de } \sigma_{\vec{n}} \text{ con } \lambda = -1 \end{array}} \quad (12.43)$$

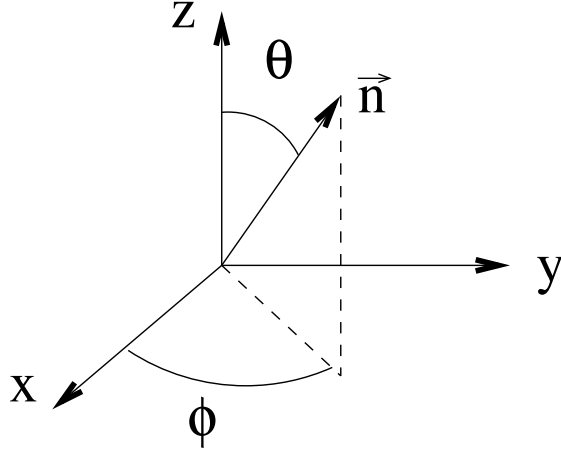


Figure 7: El vector unitario  $\vec{n}$  está dirigido en la dirección del vector de posición  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

Estos son los estados que tienen un valor bien definido del espín en la dirección de  $\vec{n}$ . Pongamos:

$$\sigma_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a' \end{pmatrix}, \quad a = \cos \theta, \quad a' = -\cos \theta, \quad b = e^{-i\phi} \sin \theta. \quad (12.44)$$

En nuestro estudio general de las matrices  $2 \times 2$  obtuvimos que los autovectores de esta matriz son:

$$|\pm, \vec{n}\rangle = \frac{e^{i\alpha_{\pm}}}{\sqrt{(\lambda_{\pm} - a)^2 + |b|^2}} \begin{pmatrix} b \\ \lambda_{\pm} - a \end{pmatrix}, \quad (12.45)$$

siendo  $\lambda_{\pm} = \pm 1$  el autovalor y  $\alpha_{\pm}$  una fase arbitraria. Puede comprobarse fácilmente que estos dos vectores son ortogonales. Estudiemos en primer lugar el autovector correspondiente a  $\lambda_+ = +1$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_+ - a &= 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ (\lambda_+ - a)^2 + |b|^2 &= 4 \sin^4 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (12.46)$$

donde, en el último paso de la segunda ecuación, hemos utilizado que  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ . Substituyendo estos resultados en (12.45), obtenemos:

$$|+, \vec{n}\rangle = e^{i\alpha_+} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (12.47)$$

De forma similar:

$$\begin{aligned}\lambda_- - 1 &= -1 - \cos \theta = -2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ (\lambda_- - a)^2 + |b|^2 &= 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \theta = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\quad (12.48)$$

Por tanto:

$$|-, \vec{n}\rangle = e^{i\alpha_-} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.\quad (12.49)$$

Como comprobacion verifiquemos la descomposicion espectral de  $\sigma_{\vec{n}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = |+, \vec{n}\rangle \langle +, \vec{n}| - |-, \vec{n}\rangle \langle -, \vec{n}| \quad (12.50)$$

Calculemos los terminos del segundo miembro de (12.50). Evidentemente las fases  $\alpha_{\pm}$  no contribuyen, por lo que podemos ignorarlas en este calculo. Efectuando el producto externo del vector  $|+, \vec{n}\rangle$  por si mismo, obtenemos:

$$|+, \vec{n}\rangle \langle +, \vec{n}| = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.\quad (12.51)$$

De forma similar:

$$|-, \vec{n}\rangle \langle -, \vec{n}| = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.\quad (12.52)$$

Entonces, utilizando las formulas del angulo doble, llegamos a:

$$|+, \vec{n}\rangle \langle +, \vec{n}| - |-, \vec{n}\rangle \langle -, \vec{n}| = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}.\quad (12.53)$$

Observe que tambien se verifica la relacion de complitud:

$$|+, \vec{n}\rangle \langle +, \vec{n}| + |-, \vec{n}\rangle \langle -, \vec{n}| = 1,\quad (12.54)$$

tal como se puede verificar facilmente sumando (12.51) y (12.52).

La forma convencional de escoger las fases  $\alpha_{\pm}$  es:

$$e^{i\alpha_+} = e^{i\frac{\phi}{2}}, \quad e^{i\alpha_-} = -e^{i\frac{\phi}{2}}.\quad (12.55)$$

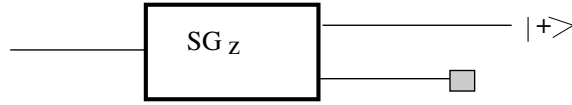


Figure 8: Aparato de Stern-Gerlach con campo magnetico en la direccion  $z$  en el que se bloquea el haz con estados  $|-\rangle$ .

Con esta eleccion los autovectores  $|+, \vec{n}\rangle$  y  $|-, \vec{n}\rangle$  son:

$$|+, \vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |-, \vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (12.56)$$

Estos autovectores pueden ser utilizados para obtener amplitudes de transicion correspondientes a procesos en los cuales se combinan dos aparatos de Stern-Gerlach (SG), dando lugar a un filtro de SG. Supongamos que tenemos un aparato de SG con el campo magnetico en la direccion del eje  $z$ , en el cual bloqueamos uno de los caminos (el que corresponde al estado  $|-\rangle$ ), tal como se muestra en la figura 8.

Supongamos que combinamos este primer filtro con otro SG en el cual el campo magnetico esta orientado en la direccion  $\vec{n}$ , de forma que la salida de  $SG_z$  (que solo contiene estados  $|+\rangle$ ) es la entrada al nuevo  $SG_{\vec{n}}$ , tal como se indica esquematicamente en la figura 9.

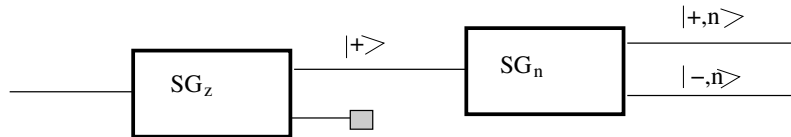


Figure 9: Dos aparatos de Stern-Gerlach acoplados. El haz con  $S_z = +\hbar/2$  que sale del primer aparato se hace incidir sobre otro en el que el campo magnetico esta orientado en la direccion  $\vec{n}$ .

Vamos a calcular las probabilidades de que en el segundo aparato de SG obtengamos  $+\frac{\hbar}{2}$  o  $-\frac{\hbar}{2}$  al medir el espin en la direccion  $\vec{n}$ . Esto es equivalente a predecir las intensidades de los haces salientes. Las amplitudes de probabilidad son:

$$a(|+\rangle \rightarrow |+, \vec{n}\rangle) = \langle +, \vec{n} | + \rangle, \quad a(|+\rangle \rightarrow |-, \vec{n}\rangle) = \langle -, \vec{n} | + \rangle. \quad (12.57)$$

Pero (escogiendo la fase  $\alpha_+$  de acuerdo a nuestras convenciones), los bras  $\langle +, \vec{n} |$  y  $\langle -, \vec{n} |$  son:

$$\begin{aligned} \langle +, \vec{n} | &= \left( e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \right) = e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \langle + | + e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \langle - |, \\ \langle -, \vec{n} | &= \left( -e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \right) = -e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \langle + | + e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \langle - |. \end{aligned} \quad (12.58)$$

Por tanto, las amplitudes que estamos buscando son:

$$\boxed{a(|+\rangle \rightarrow |+, \vec{n}\rangle) = e^{\frac{i\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2}} \quad \boxed{a(|+\rangle \rightarrow |-, \vec{n}\rangle) = -e^{\frac{i\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2}} \quad (12.59)$$

Las correspondientes probabilidades son:

$$\boxed{P_+ = |a(|+\rangle \rightarrow |+, \vec{n}\rangle)|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad \boxed{P_- = |a(|+\rangle \rightarrow |-, \vec{n}\rangle)|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (12.60)$$

Notese que  $P_{\pm}$  solo depende del angulo  $\theta$  (y no depende de  $\phi$ ). Veamos algunos casos particulares:

$$\begin{aligned} \boxed{\theta = 0} & \rightarrow \text{SG}_{\vec{n}} = \text{SG}_z & \rightarrow & \boxed{P_+ = 1, P_- = 0} \\ \boxed{\theta = \pi} & \rightarrow \text{SG}_{\vec{n}} = \text{SG}_{-z} & \rightarrow & \boxed{P_+ = 0, P_- = 1} \\ \boxed{\theta = \pi/2} & \rightarrow \text{SG}_{\vec{n}} = \text{SG}_x & \rightarrow & \boxed{P_+ = \frac{1}{2}, P_- = \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12.61)$$

Observemos que la configuracion con  $\theta = \pi$  corresponde a invertir el campo magnetico en el aparato de SG. Naturalmente, en todos los casos  $P_+ + P_- = 1$ . El valor medio del espin es:

$$\frac{\hbar}{2} P_+ - \frac{\hbar}{2} P_- = \frac{\hbar}{2} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\hbar}{2} \cos \theta, \quad (12.62)$$

que es justamente la proyeccion del espin inicial (dirigido a lo largo del eje  $z$ ) sobre la direccion de  $\vec{n}$ , tal como se muestra en la figura 10.

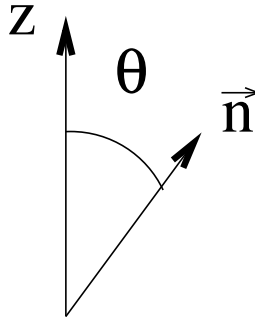


Figure 10: El vector  $\vec{n}$  forma un angulo  $\theta$  con el eje  $z$ .

Los estados  $|\pm, \vec{n}\rangle$  y  $|\pm\rangle$  se pueden relacionar entre si por medio de una matriz de rotacion:

$$D = D(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} D_{++} & D_{+-} \\ D_{-+} & D_{--} \end{pmatrix}. \quad (12.63)$$

Pongamos:

$$|+, \vec{n}\rangle = D_{++}|+\rangle + D_{-+}|-\rangle, \quad |-, \vec{n}\rangle = D_{+-}|+\rangle + D_{--}|-\rangle, \quad (12.64)$$

siendo:

$$D = \begin{pmatrix} D_{++} & D_{+-} \\ D_{-+} & D_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (12.65)$$

Como se puede comprobar facilmente, la matriz  $D$  es una matriz unitaria de determinante unidad (es decir es una matriz del grupo de Lie  $SU(2)$ ). Es interesante señalar que para una rotacion de angulo  $2\pi$ , que nos devuelve a la posicion original, la matriz  $D$  vale  $-1$  y, por consiguiente, un estado  $|\chi\rangle$  es llevado a  $-|\chi\rangle$ . Esto se puede comprobar poniendo  $\theta = 0$  y  $\phi = 2\pi$  en (12.65). Este hecho no constituye ninguna paradoja porque los estados  $|\chi\rangle$  y  $-|\chi\rangle$  son equivalentes y ocurre porque el grupo  $SU(2)$  es un doble recubrimiento del grupo de rotaciones  $SO(3)$ .

Otro calculo interesante es el valor esperado de  $\vec{S}$  en el estado  $\langle +, \vec{n}|$ . Este valor medio vale:

$$\langle \vec{S} \rangle_{+\vec{n}} = \langle +, \vec{n} | \vec{S} | +, \vec{n} \rangle = \frac{\hbar}{2} \vec{n}. \quad (12.66)$$

Comprobemoslo para la componente  $x$ :

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle_{+\vec{n}} &= \frac{\hbar}{2} \langle +, \vec{n} | \sigma_x | +, \vec{n} \rangle = \frac{\hbar}{2} (e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{2} (e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \phi = \frac{\hbar}{2} n_x. \end{aligned} \quad (12.67)$$

De forma completamente analoga se demuestra (12.66) para las componentes  $(y, z)$ . Tambien puede probarse que:

$$\langle \vec{S} \rangle_{-\vec{n}} = \langle -, \vec{n} | \vec{S} | -, \vec{n} \rangle = -\frac{\hbar}{2} \vec{n}. \quad (12.68)$$

Observemos que estos ultimos resultados son bastante logicos e implican que el valor medio del espin  $\langle \vec{S} \rangle$  transforma como un vector bajo rotaciones espaciales.

## 13 Evolucion temporal del espin

Estudiemos como varia el espin con el tiempo en presencia de un campo electromagnetico. Analizemos, en primer lugar, el problema clasicamente. En mecanica clasica la derivada temporal del momento angular es el momento de la fuerza. Aplicando este principio al espin  $\vec{S}$ , obtenemos:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B} . \quad (13.1)$$

Como  $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ , se sigue que:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \gamma \vec{S} \times \vec{B} . \quad (13.2)$$

Si en esta ultima expresion ponemos  $\vec{B} = B \vec{n}$  con  $\vec{n}^2 = 1$  y  $B = |\vec{B}|$ , llegamos a:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \omega \vec{n} \times \vec{S} , \quad (13.3)$$

siendo  $\omega$  la denominada frecuencia de Larmor:

$$\omega \equiv -\gamma B = -g \frac{qB}{2mc} , \quad (13.4)$$

donde hemos utilizado el valor de  $\gamma$  escrito en la ecuacion (12.14). La ecuacion (13.3) nos dice que el espin  $\vec{S}$  rota alrededor de la direccion  $\vec{n}$  del campo magnetico con velocidad angular  $\omega$ . En efecto, en un pequeño intervalo de tiempo  $\delta t$ ,  $S$  cambia como  $\vec{S} \rightarrow \vec{S} + \delta\vec{S}$ , siendo:

$$\delta\vec{S} = \omega \delta t \vec{n} \times \vec{S} , \quad (13.5)$$

es decir  $\delta\vec{S}$  es ortogonal al plano formado por  $\vec{n}$  y  $\vec{S}$ , tal como se ilustra en la figura 11, en la cual el eje  $z$  esta orientado a lo largo de la direccion de  $\vec{n}$ .

Estudiemos ahora el problema cuanticamente. Si  $\vec{B} = (0, 0, B)$  es constante, el operador hamiltoniano es:

$$H = -\gamma S_z B = \omega S_z = \frac{\omega \hbar}{2} \sigma_z , \quad (13.6)$$

o mas explicitamente:

$$H = \frac{\omega \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (13.7)$$

La evolucion temporal de un estado sera:

$$|\chi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\chi(0)\rangle . \quad (13.8)$$

Los estados  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ , correspondientes a los autovalores  $+1$  y  $-1$  de  $\sigma_z$ , son estacionarios y evolucionan con el tiempo como:

$$|+\rangle \rightarrow e^{-\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle \quad |-\rangle \rightarrow e^{\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle . \quad (13.9)$$

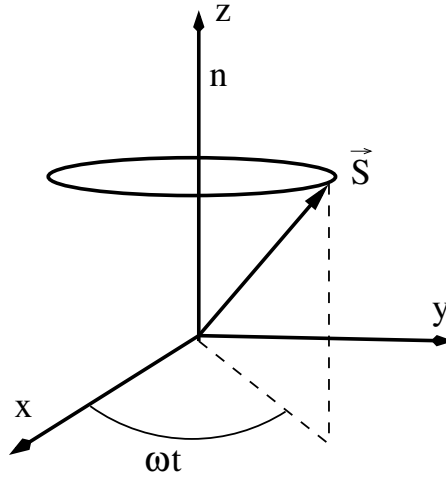


Figure 11: El momento angular  $\vec{S}$  rota respecto a la direccion del campo magnetico  $\vec{B}$  (el eje  $z$ ) con velocidad angular  $\omega$ .

Supongamos que en el estado inicial  $t = 0$  el espin apunta en la direccion  $\vec{n}$ , es decir:

$$|\chi(0)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\phi}{2}} |-\rangle . \quad (13.10)$$

Entonces, aplicando la sustitucion (13.9), obtenemos que en  $t \neq 0$  el estado del sistema es:

$$|\chi(t)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\phi+\omega t)} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\phi+\omega t)} |-\rangle . \quad (13.11)$$

Es decir, el espin apunta en la direccion  $(\theta, \phi + \omega t)$ . Por tanto rota en torno a la direccion del eje  $z$  con velocidad angular  $\omega$ , que es la misma con la que gira el espin clasico.